

# PERMODELAN DINAMIK DAN VALIDITAS MODEL DARI SISTEM KENDALI TANGKI GANDA

Oleh :

IR. A.K. MARJITO  
NANI MULYANINGSIH, ST  
Staf Pengajar Jurusan Teknik Mesin FT-UTM

## RINGKASAN

Makalah ini membahas tentang permodelan dinamik dan validitas model dari sistem kendali tangki ganda yang terdiri dari tangki air ganda, motor dan sensor ketinggian permukaan air. Permodelan dinamik dari tangki air ganda mula-mula diturunkan secara analitik. Kemudian pengujian eksperimental dilakukan untuk mencari nilai dari parameter-parameter yang tidak diketahui besarnya selain tangki air ganda, komponen-komponen lain juga perlu dimodelkan walaupun cukup secara statik. Setelah model dari semua komponen diperoleh, maka model dinamik dari sistem kendali tangki ganda secara keseluruhan baru dapat diuji kebenarannya.

## ABSTRACT

This paper describes dynamic modeling and model validation of a couple-tank control system, which consist of a couple-tank, two electric-motor drivers, and two water-level sensors. Initially, dynamic modeling of the couple-tank was derived analytically. This derivation produced several parameters whose values were unknown. Experiments were then performed in order to obtain the values of those parameters. In addition to the couple-tank, other components were also modeled statically. Once all components of the couple-tank controlled system have been modeled, model validation of the whole system can then be performed.

**Keywords:** Dynamic modeling, model validation, control, curve of the smallest quadrate.

### 1. Pendahuluan

Permodelan merupakan kegiatan yang sangat penting baik untuk mengetahui perilaku sistem maupun untuk mengendalikannya. Dengan adanya model, dapat dijelaskan kenapa suatu sistem berperilaku demikian. Dengan adanya model, dapat diramalkan bagaimana perilaku dan unjuk kerja sistem bila padanya dilakukan modifikasi. Tersedianya model juga akan menghemat waktu dan biaya untuk menyelidiki dan memperbaiki perilaku sistem.

Berdasarkan tujuannya, model dapat dibedakan menjadi dua yaitu model untuk perancangan sistem kendali dan model untuk menyelidiki perilaku dan sifat dari sistem. Model untuk kendali dapat diperoleh dengan dua cara yaitu analisis dinamik dan pengujian eksperimental berdasarkan data masukan-keluaran. Sementara itu, model untuk menyelidiki perilaku sistem dapat diklasifikasikan menjadi dua macam yaitu model simulasi komputer dan model skala.

Makalah ini akan membahas tentang cara pemodelan dinamik dari sistem kendali tangki ganda. Sistem ini menarik untuk dijadikan obyek pemodelan karena cukup sederhana sehingga proses pemodelannya sendiri dapat diikuti dengan baik tanpa dipersulit oleh cara kerja dan fungsi dari komponen-komponen sistem. Walaupun sederhana, akan tampak bahwa sistem tangki ganda mempunyai dinamika yang tidak linier, satu arah dan berubah terhadap waktu.

## 2. Pemodelan Dinamik dan Validasi Model dari Komponen Sistem Tangki Ganda

Sistem kendali tangki ganda memiliki lima macam komponen utama yaitu tangki air ganda; pompa-dan-motor (tidak dapat dipisahkan), sensor ketinggian air, rangkaian penggerak motor pompa dan komputer PC yang berisi program akuisisi data dan pengendalian. Pemodelan tangki ganda dilakukan secara analitik dan eksperimental.

### 2.1 Pemodelan Dinamik Dari Tangki Ganda

#### 2.1.1 Pemodelan Teoritik

Secara skematis, tangki air ganda dapat ditampilkan seperti terlihat dalam Gambar 1. Dalam gambar ini tampak bahwa tangki air ganda terdiri dari dua buah tangki, yaitu tangki kecil (kiri) dan tangki besar (kanan). Tangki kecil diisi air dengan debit  $q_1$  oleh pompa 1, sedangkan tangki besar dengan debit  $q_2$  oleh pompa 2. Pada ketinggian air  $h_1$  tangki kecil akan mengalirkan ke luar dengan debit  $q_3$  dan pada ketinggian  $h_2$  tangki besar mengalirkan air ke luar dengan debit  $q_4$ . Bila ketinggian air pada tangki kecil tidak sama dengan ketinggian air pada besar, maka akan terjadi aliran antar tangki  $q_5$ . Dengan menggunakan persamaan kontinuitas berlaku hubungan berikut (dikutip dari Introduction to Physical System Modelling, hal. 40) :

$$A_1 \dot{h}_1 = -q_3 - q_5 \text{ sign}(h_1 - h_2) + q_1 \quad (1)$$

$$A_2 \dot{h}_2 = -q_4 - q_5 \text{ sign}(h_1 - h_2) + q_2 \quad (2)$$

Dalam persamaan di atas, fungsi *sign* diperlukan agar suku di tengah berubah tanda bila  $h_1 < h_2$  karena pada kondisi demikian air mengalir dari tangki besar ke tangki kecil.

Dengan menggunakan hukum Bernoulli dan konsep tahanan katup dapat ditunjukkan bahwa (dikutip dari Fluid Mechanic, hal. 11) :

$$q_3 = K_3 \sqrt{h_1} \quad (3)$$

dimana :

$$K_3 = q_3 \sqrt{2g/R_3} \quad (4)$$

Dalam persamaan di atas,  $K_3$  adalah parameter aliran katup 3,  $g$  adalah percepatan gravitasi bumi,  $a_3$  adalah luas penampang bagian dalam tahap keluaran tangki kecil dan  $R_3$  menyatakan koefisien hambatan katup 3. Dengan cara yang sama, untuk katup keluaran tangki besar berlaku hubungan berikut :

$$q_4 = K_4 \sqrt{h_2} \quad (5)$$

dimana :

$$K_4 = q_4 \sqrt{2g/R_4} \quad (6)$$

Sementara itu, untuk katup antar tangki berlaku hubungan berikut :

$$q_5 = K_5 \sqrt{|h_1 - h_2|} \quad (7)$$

dimana :

$$K_5 = q_5 \sqrt{2g/R_5} \quad (8)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3), (5) dan (7) ke dalam persamaan (1) dan (2) dapat diperoleh persamaan dinamik dari tangki ganda sebagai berikut :

$$A_1 h_1 = -K_3 \sqrt{h_1} - K_5 \sqrt{|h_1 - h_2|} \text{sign}(h_1 - h_2) + q_1 \quad (9)$$

$$A_2 h_2 = -K_4 \sqrt{h_2} - K_5 \sqrt{|h_1 - h_2|} \text{sign}(h_1 - h_2) + q_2 \quad (10)$$

Persamaan dinamik di atas jelas bukan merupakan persamaan dinamik yang linier. Dalam persamaan ini besar parameter  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  seharusnya dihitung dari persamaan (4), (6), dan (8).

### 2.1.2 Pemodelan Eksperimental dan Validasi Model

Untuk mendapatkan parameter  $K_3$  dari persamaan (9), maka laju aliran masuk tangki 1 dibuat nol ( $q_1 = 0$ ) dan katup anatr tangki ditutup sehingga  $K_5 = 0$ . Oleh karena itu persamaan (9) menjadi sederhana yaitu (dikutip dari Perancangan dan Pengujian Sistem Kendali Tangki Ganda, hal. 20) :

$$A_1 h_1 = -K_3 \sqrt{h_1} \quad (11)$$

Selanjutnya dengan mengintegrasi persamaan di atas dan mensubstitusi syarat batas  $h_1 = h_{10}$  pada saat  $t = 0$  akan dihasilkan hubungan berikut :

$$\sqrt{h_1} = -\frac{K_3}{2A_1} t + \sqrt{h_{10}} \quad (12)$$

Persamaan di atas selanjutnya didekati dengan persamaan suaian kurva berikut (Dikutip dari Introduction to Physical Sistem Modelling, hal. 39) :

$$\sqrt{h_1} = -Pt + Q + e_1 \quad (13)$$

Dimana  $e_1$  merupakan kesalahan pendekatan. Karena itu, dengan menerapkan metode suaian kurva kuadrat terkecil dapat diturunkan besar koefisien P dan Q sebagai berikut (Dari Introduction to Physical System, hal. 40) :

$$P = \frac{\sum \sqrt{h_j} \sum t_j - n \sum (t_j h_j)}{n \sum t_j^2 - (\sum t_j)^2} \quad (14)$$

$$Q = \frac{\sum \sqrt{h_j} \sum t_j^2 - n \sum (t_j \sqrt{h_j}) \sum t_j}{n \sum t_j^2 - (\sum t_j)^2} \quad (15)$$

Dalam persamaan (14) dan (15) operator  $\sum$  menyatakan penjumlahan dari  $j = 1$  sampai  $j = n$ , dimana  $n$  menyatakan banyaknya data pengamatan.

Untuk menentukan nilai dari koefisien P dan Q, dilakukan pengujian prosedur berikut :

- Tutup katup pada saluran penghubung antar tangki
- Tutup katup keluaran dari tangki kecil
- Isi tangki kecil dengan air sampai ketinggian 29 cm
- Buka penuh katup keluaran tangki kecil
- Ambil data waktu dan ketinggian setiap saat
- Hitung koefisien P dan Q dari persamaan (14) dan (15)

Dalam pengujian ini diambil data sebanyak 3500 buah. Dari perhitungan yang dilakukan diperoleh harga  $P=0,036961$ ,  $Q=5,390711$  dan  $e_1=0,001$ , sehingga persamaan (13) dapat didekati dengan :

$$\sqrt{h_1} = -0,036961 t + 5,390711 \quad (16)$$

selanjutnya persamaan (16) disimulasikan dan dibandingkan dengan data pengujian (Gambar 2). Dengan cara yang sama, untuk tangki besar dapat dilakukan penurunan dan pengujian yang serupa (Gambar 3). Untuk mendapatkan persamaan suaian kurva dari aliran antar tangki, maka  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , dan  $q_4$  dibuat sama dengan nol sehingga persamaan (9) berubah menjadi :

$$A_1 h_1 = -K_{5A} \sqrt{h_1 - h_2} \quad (17)$$

Operator mutlak dan fungsi sign dalam persamaan di atas hilang karena untuk memperoleh harga  $k_{5A}$  tinggi  $h_1$  akan dibuat lebih besar dari  $h_2$ . Disamping itu, dalam persamaan ini  $k_5$  ditulis sebagai  $k_{5A}$  karena dikhawatirkan bahwa  $k_5$  untuk aliran dari tangki kecil ke tangki besar harganya berbeda bila arah aliran dibalik.

Untuk menyelesaikan persamaan (17)  $h_2$  akan dipertahankan tetap selama pengujian pemodelan  $k_{5A}$  berlangsung. Sehingga persamaan (17) akan menjadi :

$$A_1 h_1 = -K_{5A} \sqrt{h_1 - h_{2T}} \quad (18)$$

Dalam persamaan di atas,  $h_{2T}$  adalah  $h_2$  yang dipertahankan tetap selama pengujian berlangsung. Persamaan (18) ini dengan menggunakan kondisi batas bahwa  $h_1 = h_{10}$  pada saat  $t=0$ , integrasi persamaan (18) akan menghasilkan hubungan :

$$\sqrt{h_1 - h_{2T}} = -\frac{K_{5A}}{2A_1} t + \sqrt{h_{10} - h_{2T}} \quad (19)$$

Selanjutnya didekati dengan persamaan suaian kurva berikut :

$$\sqrt{h_1 - h_{2T}} = -R t + S + e_2 \quad (20)$$

Dimana  $e_2$  merupakan kesalahan pendekatan. Dengan menerapkan metode suaian kurva kuadrat terkecil maka :

$$R = \frac{\sum \sqrt{h_{1j} - h_{2T}} \sum t_j - n \sum (t_j \sqrt{h_{1j} - h_{2T}})}{n \sum t_j^2 - (\sum t_j)^2} \quad (21)$$

$$S = \frac{\sum \sqrt{h_{1j} - h_{2T}} \sum t_j^2 - n \sum (t_j \sqrt{h_{1j} - h_{2T}}) \sum t_j}{n \sum t_j^2 - (\sum t_j)^2} \quad (22)$$

Untuk menentukan harga koefisien R dan S, dilakukan pengujian dengan prosedur sebagai berikut :

- Tutup katup pada saluran penghubung antar tangki.
- Tutup katup keluaran dari tangki besar maupun tangki kecil.
- Isi tangki kecil dengan air sampai penuh dan tangki besar sampai ketinggian tertentu misalnya 3,5 cm.
- Buka katup penghubung antar tangki. Selama terjadi aliran dari tangki kecil ke tangki besar, tinggi air di tangki besar harus dipertahankan tetap dengan cara memompa air keluar dari tangki ini.
- Ambil data waktu dan ketinggian setiap saat, hitung koefisien R dan S dari persamaan (21) dan (22).

Data pengujian ini diambil data sebanyak 3500 buah. Dari perhitungan yang dilakukan diperoleh harga  $R=0,158074$ ,  $S=5,156314$ , dan  $c_2=0,002$ . Sehingga persamaan (20) dapat didekati dengan :

$$\sqrt{h_1 - h_{2T}} = -0,158074 + 5,156314 \quad (23)$$

Kemudian persamaan tersebut dibandingkan dengan data pengujian (Gambar 4). Untuk membuktikan bahwa persamaan (23) yang diperoleh juga memenuhi persamaan (17) dimana ketinggian air di tangki besar dibiarkan naik, maka validasi model perlu pula dilakukan (Gambar 5). Pada kondisi demikian persamaan (19) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sqrt{h_1 - h_{2T}} = -\frac{K_{5B}}{2A_1} t + \sqrt{h_{20} - h_{1T}} \quad (24)$$

Persamaan suaian kurva yang diperoleh dari pengujian :

$$\sqrt{h_2 - h_{2T}} = -0,071602 + 4,965293 \quad (25)$$

Validasi bahwa persamaan (25) mendekati perilaku aliran dari tangki besar ke tangki kecil diperlihatkan dalam Gambar 6. Sedangkan gambar 7 memperlihatkan validasi yang serupa bila ketinggian air di tangki kecil diperbolehkan naik.

Tabel 1. Harga Parameter Hasil Pengujian

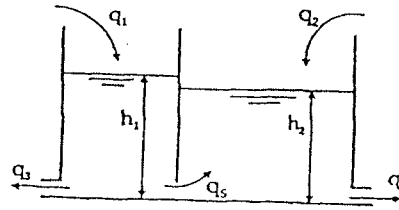
Parameter	Harga (cm <sup>2,5s</sup> )
$K_3$	11,90
$K_4$	12,78
$K_{5A}$	50,90
$K_{5B}$	57,28

Dengan diketahuinya harga  $K_3$ ,  $K_4$  dan  $K_5$  maka persamaan (9) dan (10) dapat ,  
ditulis kembali menjadi :

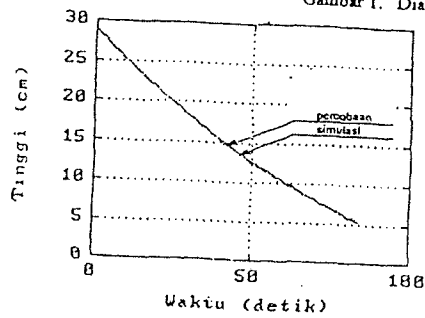
$$161h_1 = -11,90\sqrt{h_1} - 54,09\sqrt{|h_1 - h_2|}\text{sign}(h_1 - h_2) + q_1 \quad (26)$$

$$400h_2 = -12,78\sqrt{h_2} + 54,09\sqrt{|h_1 - h_2|}\text{sign}(h_1 - h_2) + q_2 \quad (27)$$

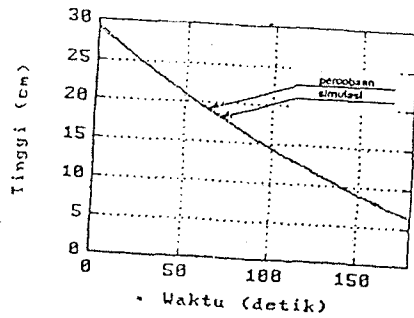
Kedua persamaan di atas merupakan model dinamik dari tangki air ganda.



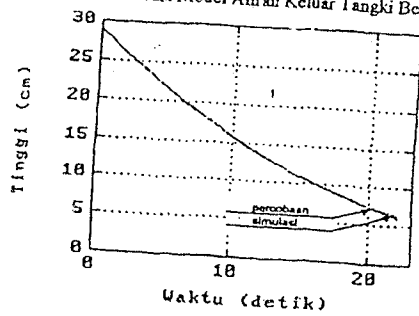
Gambar 1. Diagram skematik dari tangki air ganda



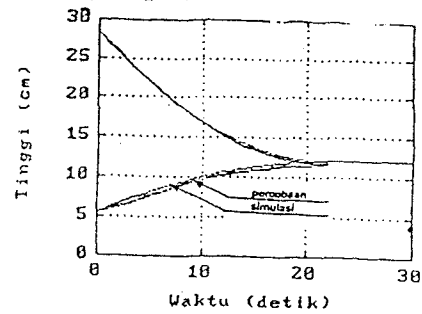
Gambar 2. Validasi Model Aliran Keluar Tangki Kecil.



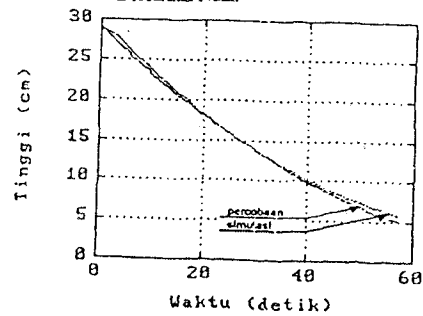
Gambar 3. Validasi Model Aliran Keluar Tangki Besar.



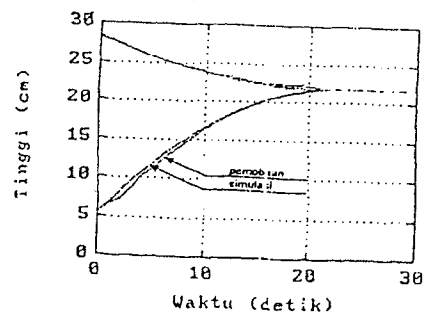
Gambar 4. Validasi Model Aliran dari Tangki Kecil ke Tangki Besar.



Gambar 5. Validasi Model Aliran dari Tangki Kecil ke Tangki Besar. Ketinggian Air di Tangki Besar Dibiarkan Naik.



Gambar 6. Validasi Model Aliran dari Tangki Besar ke Tangki Kecil.



Gambar 7. Validasi Model Aliran dari Tangki Besar ke Tangki Kecil. Ketinggian Air di Tangki Kecil Dibiarkan Naik.



## 2.2 Pemodelan Komponen Lain

Komponen lain penyusun sistem kendali tangki ganda cukup dimodelkan secara statik. Pemodelan komponen lain meliputi pemodelan motor-dan-pompa. Pemodelan sensor ketinggian dan pemodelan rangkaian penggerak motor.

### 2.2.1 Pemodelan Motor-dan-Pompa

Pemodelan motor-dan-pompa dilakukan dengan cara mengalirkan air ke tangki ketika semua katup tangki dalam keadaan tertutup. Waktu dan ketinggian air yang terjadi setiap saat dimonitor. Untuk menghitung laju aliran yang terjadi, digunakan persamaan suaian kurva yang menghubungkan antara ketinggian air dan laju aliran. Dari pengujian ini diperoleh hubungan sebagai berikut (Dikutip dari Automatic Control Engineering, hal. 60) :

$$q_1 = 25,711 v_1 - 61,506 \quad (28)$$

$$q_2 = 25,446 v_2 - 60,804 \quad (29)$$

Dimana  $v_1$  dan  $v_2$  menyatakan besar tegangan listrik yang diberikan ke motor 1 dan 2. Persamaan (28) dan (29) hanya berlaku untuk  $3 \leq v_1 \leq 12$  Volt dan  $3 \leq v_2 \leq 12$  Volt.

### 2.2.2 Pemodelan Sensor Ketinggian Air

Pemodelan (dalam hal ini dapat dikatakan kalibrasi) sensor ketinggian air dilakukan dengan mengukur tinggi permukaan air dan membaca tegangan keluaran sensor ketinggian air. Kalibrasi ini menghasilkan persamaan berikut :

$$v_{h1} = 3,359 - 0,0722h_1 \quad (30)$$

$$v_{h2} = 3,354 - 0,0720h_2 \quad (31)$$

Dimana  $v_{h1}$  dan  $v_{h2}$  menyatakan tegangan listrik yang dihasilkan sensor ketika ketinggian permukaan air  $h_1$  dan  $h_2$ .

### 2.2.3 Pemodelan Rangkaian Penggerak Motor Pompa

Rangkaian penggerak motor pompa dikalibrasi dengan cara memberikan masukan berupa tegangan listrik dan mengukur tegangan keluarannya. Kalibrasi ini menghasilkan persamaan berikut :

$$v_1 = -4,260 u_1 + 36,932 \quad (32)$$

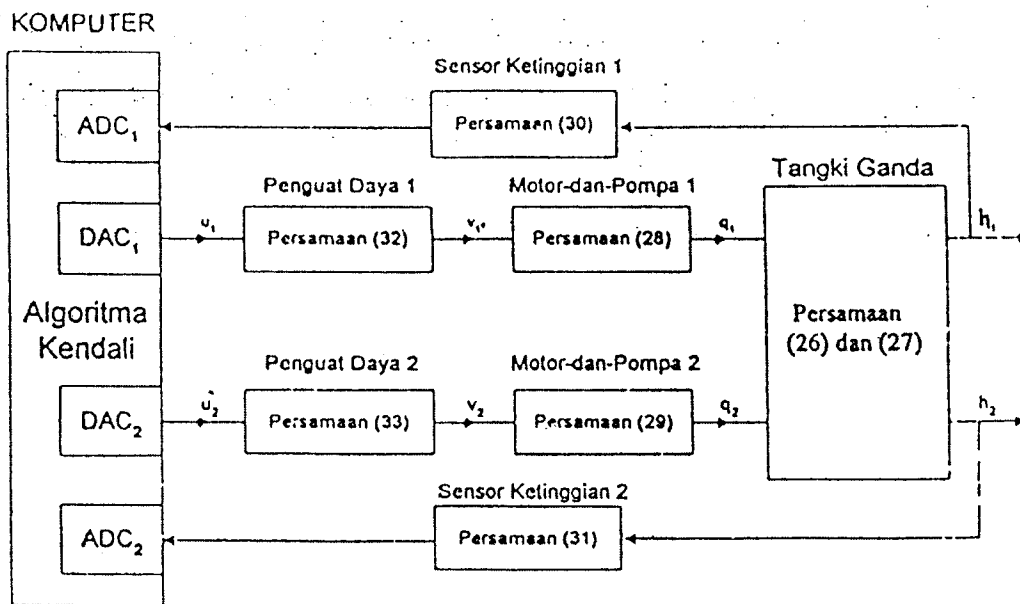
$$v_2 = -4,300 u_2 + 36,883 \quad (33)$$

Dimana  $u_1$  dan  $u_2$  masing-masing menyatakan besar tegangan listrik yang dihasilkan oleh pengatur 1 dan 2 setelah melalui konverter digital ke analog.

### 3. Pemodelan Dinamik dan Validasi Model Dari Sistem Keseluruhan

Model dinamik dari sistem kendali tangki ganda secara keseluruhan disajikan pada gambar 8. Dalam gambar ini terlihat bahwa model dinamik dari sistem kendali tangki ganda tersusun dari beberapa persamaan dinamik dan statik.

Setelah model sistem keseluruhan disusun, maka perlu dilakukan validasi untuk mengkaji keabsahan model yang diperoleh. Untuk keperluan ini dilakukan dengan menerapkan teknik kendali *On-off* pada model dan sistem yang sebenarnya. Hasil simulasi yang diperoleh dari model kemudian dibandingkan dengan hasil pengujian.



Gambar 8. Metode Dinamik dari Sistem Kendali Tangki Ganda Secara Keseluruhan

#### **4. Kesimpulan**

Dalam makalah ini telah dibahas tentang cara pemodelan dinamik dari komponen-komponen sistem kendali tangki ganda. Setelah semua komponen dari sistem kendali tangki ganda dimodelkan maka model dari sistem keseluruhan baru dapat disusun. Validasi sistem keseluruhan menunjukkan bahwa model yang diperoleh cukup baik dalam memprediksi perilaku dinamik dari sistem tangki ganda walaupun sistem ini bersifat tak linier dan memiliki interaksi antar kanal.

## 5. Daftar Pustaka

1. P.E. Wellstead. *Introduction to Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
2. R.I. Emori dan D.J. Schuring, *Scale Models in Engineering*, Pergamon Pressm Exeter, 1977.
3. Z. Abidin, I. Maryanto dan P. Sutikno. *Perancangan, Pembuatan dan Pengujian Sistem Kendali Tangki Ganda untuk Alat Peraga Kuliah Sistem Kendali*. Jurnal Teknik Mesin, Volume IX, No. 3. Bandung, 1996.
4. F. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1979.
5. F.H. Raven, *Automatic Control Engineering*, Fifth Ed, McGraw-Hill, Singapore, 1995.